

АЛЕКСАНДЪР ГРОТЕНДИК – МАТЕМАТИК, БУНТАР, ОТШЕЛНИК

И. Тодоров

Разказ за света на идеите, за необуздания характер и за необичайната съдба на един жив гений.

*Цял живот правих това пътешествие, без да го изчерпя,
и години наред го откривам отново, страница след страница.*

А. Гротендик [G:A5]

На 28 март 2008 Александър Гротендик (АГ), новоизгрялата звезда на математиката през 50-те и 60-те години на миналия век, навършва 80. По същото време IHES¹, институтът, който се прославя заедно с Гротендик (развил там, 1958-1970, своите видения за алгебричната геометрия), празнува 50-години от основаването си – без да го покани. (Шест месеца по-рано едно нелепо недоразумение дава повод на отшелника от Пиринеите да напише гневно отворено писмо до IHES [J08].) За да се реваншират, математиците от института организират колоквиум, посветен на математическото наследство на Гротендик², и ... отново не го поканват; пращат му само афиша два дни преди откриването. (Отговорът на АГ е „Срам за безсрамниците!“³) Как и защо се случва това в цивилизована Франция? Защо менторът на поколение от най-талантливи ученици и последователи от Европа, Америка, Русия, ... напуска на 42 години света на математиците?

Според бъдещия му биограф, Шарлау⁴ [Sch], за да разберем подобна личност (ако това е въобще възможно) трябва да почнем от далече. Неговите неподражаеми „Размишления и свидетелства за миналото на математика“ [G] (над 1300 страници) са едно необяздено богатство. Всеки опит то да се преразказва води до избледняване. За съжаление, не можем да цитираме всичко наред: винаги ще останат пасажи не по-малко интересни от избраните от нас. Най-добре би било, ако читателят се запали сам да надникне в достъпния в Интернет оригинален текст (френският език на автора, в който „думите излизат колебливо, за да предадат сока на преживяното“ [G:A5]), ще

¹ Institut des Hautes Études Scientifiques – Институт за висши научни изследвания, Бюрсюр-Ивет – виж [C98, DLP].

² Aspects de la géométrie algébrique: la postérité mathématique d'Alexander Grothendieck, IHÉS, 12-16 janvier 2009.

³ “Honte à éhontés!” Благодарение на организатора, Pierre Cartier, можах да видя това необикновено писмо.

⁴ W. Scharlau пише 3-томна биография *Wer ist Alexander Grothendieck?: Anarchie, Mathematik, Spiritualität*; от нея е излязъл първият том, *Anarchie*, достъпен на http://www.schrlau-online.de/ag_1.html – виж Book Review [D08].

го възнагради за усилието). По-обозрим източник е амбициозната, грижливо написана статия [J04] на Алин Джексън (в два поредни броя на списанието на съюза на американските математици), събрала свидетелства на близки и колеги на Гротендик, които дават представа за човека и за мястото на неговото дело. Понякога просто ще назоваваме постижението (доброто наименование е, според АГ, важен творчески акт) и ще цитираме авторитетни мнения за него.

Разделите 1., 6. и 7. и донякъде 2. и 5. би трябвало да бъдат достъпни и за читатели без специални математични познания. От друга страна, ако искаме да кажем нещо съдържателно за един от най-абстрактните математици, няма как да се удържим навсякъде на популярно ниво (това се отнася особено за разделите 3. и 4.). Тук ми идват на ум думите, с които момиченцето от руското двустиише успокоява куклата си: *Ты не бойся – это гусь, я сама его боюсь ...* Сам АГ пише по подобен повод: „Време е да кажа нещо за моето математично дело, което зае и продължава да заема (за моя собствена изненада) важно място в живота ми... На моменти използвам и технически термини... Ти можеш, разбира се, да прескочиш неразбираемите пасажи. Но можеш и да ги прегледаш, и може би ще уловиш пътят едно отражение на „тайнствената красота“ (както ми писа един приятел не от бранша) на света на математичните неща ...“ [G:P5].

1. Родителите и детето (Берлин, 1928 – Монпелие, 1945-48)

Тук изследваме приключението в миналото, неговите корени, произхода му – чак до моето детство. [G:P3]

Родителите на АГ са бунтари; животът им е пълен с прекеждия. Баща му, Александър (Саша) Шапиро (1890-1942), 15 годишен, е въввлечен в анархистка група, която се бори срещу царизма в Русия. След разстрела на демонстрацията от 1905, той е в затвора за повече от 10 години. Болшевиките, скоро след Октомврийската революция, отново го затварят. С помощта на различни приятелки, загубил ръка, той бяга в Берлин с фалшиво име (Танаров); макар и еднорък, си изкарва хляба като фотограф. По свидетелството на Картие [C], АГ с гордост разказвал, че баща му е бил политически затворник при 17 различни режима. Майка му Ханка (Johanna) Гротендик (1900-1957), 17-годишна, скъсва с благополучното си протестантско семейство в Хамбург, работи като журналистка, учи театър, пише стихове и есета. Омъжва се за журналист-комунист, с когото имат дъщеря. Около 1926 се сблъсква с Танаров/Шапиро, който се представя на мъжа й с думите „Аз ще Ви открадна жената“ – и го прави: през март 1928 се ражда Шурик (Александър) син на Ханка и Саша, който ще носи фамилното име на майка си. (Ханка и Саша така и не се оженват.)

След като национал-социалистите идват на власт, в Германия става опасно за евреина „Танаров“ и той заминава за Париж. В края на 1933 и Ханка го последва във Франция, оставяйки сина си в Хамбург, в дома на лютерански пастор⁵. Тук Шурик, заедно с другите храненици, прекарва – до 1939, от 5 до 11 годишна възраст – може

⁵ Wilhelm Heydron – още една необикновена личност на пътя на Гротендик; книга за него от 1999 се цитира в [J04].



Шурик на 5 години
с бидон за мляко – Берлин, 1933

би единствения „нормален“ (макар и не лек) период от живота си. Ето какво пише той, половин век по-късно, за своето първо (немско) училище ([G:P1]): „Като дете обичах да ходя на училище. Един и същ учител ни учеше да четем и пишем, да смятаме, да пеем (той ни аккомпанираше на малка цигулка) ... Имаше магия в числата, в думите, в знаците. ... В римите ми се струваше, че има тайна – отвъд думите.“

Година след като го пращат във Франция (защото в Германия става опасно и за него), родителите му (участвували в гражданската война в Испания и избягали от Франко) и той са интернирани (като „нежелани чужденци“). Баща му е пратен в печално известния френски лагер Le Vernet, от където през 1942 го предават на немците; той е в списъка на жертвите в Освиенцим (под името Танаров, [Sch]). Ханка и детето са закарани в по-поносимо място, където Шурик може да учи. „Бях най-големият и само аз трябваше да ходя в лиця – на 4-5 километра

от лагера, в сняг и вятър, с пробити обувки... Още си спомням първото „съчинение по математика“, на което учителят ми лепна ниска оценка за доказателството на един от трите „признаци за равенство на триъгълници“. Моето доказателство не беше от учебника, който той следваше набожно... Явно, този учител не можеше сам да съди, нужен му беше авторитет – в случая книгата... Такъв подход не е изключение... Но и до сега, всеки път като се сблъскам с него, се чувствавам объркан“. Около 1942 момчето има късмет да попадне в Le Chambon, малко градче, където протестантският свещеник Трокке, друга интересна личност, организира частно училище и помага на децата (виж [Sch]). Гротендик си спомня: „Последните години от войната, докато майка ми остана интернирана в лагера, аз прекарах в дома на „Швейцарска помощ“ за деца бежанци Повечето бяхме евреи; когато ни предупреждаваха, че идва Гестапо, ние отивахме да се крием в гората за една или две нощи на малки групи от по две-три деца, без да си даваме сметка, че става дума за кожата ни...“

Поразяваше ме колко малко се интересуваха моите съученици от това, което учехме... Не малка част от времето си, даже в час (шът...) прекарах в решаване на задачи... Най-неудовлетворително в нашите учебници по математика, беше пълното отсъствие на сериозно определение на понятието за дължина (на крива), лице (на повърхност), обем (на тяло).“

Гротендик се посвещава на този проблем в Университета в Монпелие⁶ (1945-48). Там учат студентите да пресмятат дължини, лица и обеми с помощта на интегрални,

⁶ За Jean Dieudonné (1906-92) [D89], [Fest] Montpellier е изостанал по отношение на математиката в страната.

но „въпросът за истинско определение като че ли изобщо не възникваше: нито у професорите, нито у авторите на учебници. ... Изглеждаше ми, че съм единственото същество на земята, надарено с любопитство към математически въпроси... Не се съмнявах, че ще стигна до същината на нещата, макар затова, че си давах труда да вникна в тях и да записвам това, което те ми казваха. Интуицията по отношение на обема, например, беше неопровержима... Това бе реалността, която трябваше да уловя – подобно на вълшебната същност на римата... Когато, 17 годишен, едва завършил лиця, пристъпих към тази работа, мислех, че ще я свърша за няколко седмици. Тя ми взе три години. Дори се изхитрих да се проваля на изпита по сферична тригонометрия в края на втората година, заради глупава грешка в числените пресмятания. (Никога не съм бил силен в сметките.)“

Неговият професор по диференциално смятане му казва, че това, което го вълнува, е направено от Лъобег⁷. Но „на мен и през ум не ми минаваше, да търся книгата на този Лъобег. Не си представях, че може да има нещо общо между написаното в книгата и работата, която правех по моему, за да удовлетвори любопитството си“. Когато научава (по-късно, в Париж), че неговото самотно усилие наистина е довело до познат резултат, той не съжالياва: „именно тогава разбрах, че съм математик: човек, който прави математика в пълния смисъл на думата – както се „прави“ любов. Математиката стана моя любовница, винаги благосклонна към желанието ми. Тези години на самота ми заложиха вяра в себе си, която никога не бе поколебана.“ [G:P2]

2. Париж – Нанси: „Добре дошлият чужденец“ (1948-54)

*Comme appelé du néant*⁸

„Открих съществуването на математическия свят с пристигането си в Париж през 1948, 20 годишен... Не бях срещал дотогава такива странни, диви математически термини като група, тяло, пръстен, модул, комплекс, хомология, които изведнъж, без предупреждение, се изсипаха на главата ми... Ако все пак „оживях“ след този шок, и продължих да се занимавам с математика, то причината е, че светът на математиците по онова отминало време не приличаше на това, в което се превърна по-късно. Или просто ми беше провървяло и бях попаднал в най-гостоприемния му ъгъл.“ [G:I.9]. Тъй като Ели Картан (1869-1951) е вече „вън от играта“, Гротендик, който носи „препоръка за Картан“ от своя професор в Монпелие, се обръща към сина му, Анри⁹. „Слушах редовно неговите лекции (по диференциално смятане на многообрази); присъствувах и на семинара му –

⁷ Henri Lebesgue (1875-1941) създава теорията на мярката и интегрирането в своята дисертация от 1902.

⁸ *Като повикан от небитието* – думи на Гротендик [G:P8], взети като заглавие на статията [J04].

⁹ Henri Cartan (1904-2008) преподава (1940-65) в École Normale Supérieure (ENS) Париж; той, André Weil (1906-98), Jean Delsarte (1903-68), Claude Chevalley (1909-84), Дийодоне, ... иницирират, 1935, проекта „Nicolas Bourbaki“.

като слисан свидетел на споровете между него и Сер¹⁰, където се появяваха „спектрални редици“ (брр!), рисунки (наричани диаграми), изпъстрени със стрелки, които покриваха цялата дъска... На семинара на Картан също се появяваха Шевале и Вейл, а в дните на семинарите на Бурбаки ... се събираше шумна компания приятели, включваща и другите членове на бандата: Дийодоне, Шварц, Годман, Делсарт. Те си говореха на ти, ..., пушеха много и охотно се смееха. Съвсем друга беше обстановката на лекциите на Лъоре (Jean Lerau, 1906-98) в Колеж дьо Франс (върху теорията на Шаудер за топологичната степен на безкрайномерни пространства – бедният аз!). ... Странното беше, че аз, новодошъл в този свят, не разбираш, а още по-малко говорещ, езика му, не се чувствавах чужденец. ... Бях приет, бих казал като свой.“ Той привлича внимание със своята безцеремонност: „чужд човек се обаждаше от задните редове и говореше с Картан като с равен“, пише друг участник в семинара ([J04] с. 1042). Сам АГ си спомня: „Ние, повечето, си водехме записки без много да разбираме. Ако се отличавах с нещо от другите – то по това, че не се боях да задавам въпроси, които издаваха моето дълбоко невежество. Отговаряха ми кратко, с учудване, но нито веднъж не ме отрязаха, не ме „поставиха на място“ – нито в безгрижната среда на Бурбаки, нито в по-строгия кадър на курса на Лъоре в Колежа.“

По наблюдението на немския биограф, животът на АГ се дели на отчетливо разграничени етапи, от по 21 години всеки. Вторият етап, в който момчето без гражданство се превръща в един от най-влиятелните математици, започва през октомври 1949, когато, по съвет на Картан и Вейл, Шурик „заменя кипящия живот в Париж с по-спокойния в Нанси“¹¹. Гротендик си спомня с удивена благодарност топлотата, с която го посрещат там: „Приятелските чувства се проявяваха от самото начало на моето пребиваване в Нанси, в дома на Лоран и Елен Шварц (почти като член на семейството), у Дийодоне, у Годман (също).“ [G:I.19]

Като начало, Шварц (току-що получил Филдсов медал) му дава да чете своя съвместна с Дийодоне статия по теорията на безкрайномерните векторни пространства, която завършва със списък от 14 нерешени проблеми. За негова изненада, новодошлият, необразован по каноните докторант, не само скоро решава всичките, но развива своя теория за „топологични тензорни произведения на ядрени пространства“, която Шварц избира (измежду 6 готови ръкописа) за тема на докторска дисертация на младежа и я разказва на семинар в Париж ([D89], [J04]). Още в тази първа работа (завършена 1953, публикувана като монография в САЩ, 1955, седми тираж – 1990) „лъвът си показва ноктите“. Гротендик прилага нови алгебрични методи във функционалния анализ¹², за да въведе категорията от пространства „близки до крайно-мерните“, за

¹⁰ Jean-Pierre Serre (1926-), година по-голям от Гротендик, най-млад Филдсов медалист, 1954; награда Абел, 2003.

¹¹ Казват, че “Бурбаки идвал от университета в Нанкаго”, съчетание на Нанси с Чикаго (където работи Вейл) [J04].

¹² Той дава най-абстрактното определение на *ядрено пространство* – като характеризира *изображенията* на тензорни произведения на локално изпъкнали топологични пространства (т.е. *стрелките* в съответната категория).

които е в сила теоремата на Шварц за ядрото. Работата изпреварва времето си. От нея се интересуват – след 7-8 години – Гелфанд¹³ и неговите сътрудници в Москва ([C]), но „минават не по-малко от 15 години от публикуването ѝ, преди да стане част от главното течение на теорията“ ([J04], с. 1043).

В Нанси АГ живее с майка си, която страда от хванатата в лагера туберкулоза. Тя пише по това време своя автобиографична повест *Eine Frau*. Връзка между АГ и (по-възрастната) стопанка на къщата, където са под наем, води до рождението на първото му дете – сина Серж. Като човек без гражданство, Гротендик (който не желае да стане френски поданик, за да не служи в армията) не може да получи постоянна работа във Франция. (По едно време той дори мисли да стане дърводелец, за да си изкарва прехраната – [J04] с. 1044.) През 1952, на посещение в Бразилия, Лоран Шварц препоръчва своя блестящ млад студент, и АГ заминава като гост-професор в Университета в Сан Паоло през 1953-54. Там той пише „плътна и дълбока статия за метричните неравенства“¹⁴, която храни цяла школа математици в течение на 40 години [C]. Неговите работи по топологични векторни пространства преобразяват и, в известен смисъл, завършват сюжета – след година той го напуска. „Няма какво повече да се прави, темата е мъртва“, казва той на Малгранж (връстник на АГ, също ученик на Шварц) [J04] 1045. АГ сам се характеризира като строител на къщи, който няма повик да живее в тях.

„Повечето математици сами се затварят в определени идейни рамки, във „Вселена“, фиксирана веднъж завинаги – която са намерили „съвсем готова“ още по време на ученето. Те са като наследници на голяма, хубава, напълно обзаведена къща... Това е „светът“, „даденото“, в което трябва да се живее – и толкова! Нещо, което изглежда голямо, но в същото време привично, и главно – неизменно... Сам аз имам чувство, че принадлежа на породата математици, чието призвание – и радост – е непрекъснато да строят нови къщи... Но когато всичко, до последната гайка, е поставено, работникът рядко се задържа дълго в новопостроеното жилище. Той няма място в спокойствието на готовите вселени, колкото и привлекателни и хармонични да изглеждат. Други задачи и други строителни площадки го чакат...“ [G:P5]. А за рязката смяна на тематиката той пише: „Годината 1955 отбелязва решителен завой в моята математична работа: преходът от анализа към геометрията. Още си спомням обхваналото ме чувство, че съм напуснал сухи, неплодни степи и внезапно съм се озовал отново в „обетована земя“... Това впечатление на безмерно богатство¹⁵ се потвърждава и задълбочава с годините...“ [G:P9].

¹³ Израилей Моисеевич Гельфанд (Херсонска област, Украйна, 1913 – Ню Джърси, САЩ, 2009), Wolf Prize, 1978.

¹⁴ A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique ..., Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1953) 1-79; работа, която вълнува и физици (Phys. Rev. A73 (2006) 062105); на нея е посветена цяла книга: J. Diestel et al. (AMS 2008, 278 pp.).

¹⁵ АГ, майстор на езика, тук признава със съжаление, че е прибегнал до малко тромав френски израз, *accablant au delà de toute mesure* („безмерно“), за да предаде една немска (или английска) дума, *überwältigend* (*overwhelming*).

3. Морето, което се надига: теорема на Риман-Рох (1955-57)

Морето приижда неусетно и без шум, изглежда, че нищо не се случва, нищо не мърда, водата е толкова далеч, че едва се чува... Все пак, в края на краищата, тя огражда упорития варовик; малко по малко той се превръща в островче, което се потапя ... и като че се разтваря в океана¹⁶
А. Гротендик

В често цитиран пасаж от третата част на неговите *Размишления*, Гротендик съпоставя два стила в математиката: „Да вземем, например, задачата да се докаже хипотетична теорема (до което според някои се свежда работата на математика). Виждам два крайни възможни подхода към нея. Единият е на чука и длетото, когато задачата се разглежда като твърд орех... Принципът е прост: поставя се острието на длетото срещу черупката и се удря силно. При нужда операцията се повтаря на различни места, докато черупката се счупи... Образът, който ми идва на ум при втория подход е да се потопа орехът в размекваща течност, защо не във вода, от време на време се разтрива, за да проникне тя по-добре, останалото е работа на времето. След седмица или месец черупката се размеква – когато му е дошло времето натискане с пръсти е достатъчно черупката да се отвори като зряло авокадо! Или още, оставяме ореха да узрее на слънце и на дъжд ... докато черупката сама се разтвори при леко докосване. – Читателят, който поне малко познава моите работи, няма да има трудност да се сети, кой от двата метода е моят.“ [G: с. 552-553/539]. Картината с прииждащото море от мотото може би още по-добре характеризира подхода на Гротендик [McL]. Работите на АГ (и съавтори) по алгебрична геометрия, които съществено разширяват и обобщават предмета и правят трудни доказателства естествени и прости, заемат над 10 000 страници – изкусно разлято море от елементарни стъпки! Пиер Делин¹⁷, най-блестящият ученик на АГ, като цитира приведените думи на своя учител, добавя [D98]: „Спомням си своето изумление, когато, на експозе на Гротендик, ... изглеждаше, че всичко се развива само, нищо не става, а накрая възникна явно нетривиална теорема.“

Първият пример на Гротендик, илюстриращ неговия подход, е теоремата на Риман-Рох¹⁷. Класическият резултат, който изразява размерността на пространството от мероморфни функции с полюси от даден ред чрез *рода* (броя на дръжките) на съответната риманова повърхнина, е обобщен (1954) от Хирцебрух¹⁸ за произволно-мерни компактни комплексни многообразия. Това изглежда всичко, което би могло да

¹⁶ La mer s'avance insensiblement et sans bruit, rien ne semble se passer, rien ne bouge, l'eau est si loin, on l'entend à peine ... Pourtant elle finit par entourer la substance rétive, celle-ci peu à peu devient ... une île, puis un îlot, qui finit par être submergé à son tour, comme s'il était finalement dissous dans l'océan ... [G: Troisième Partie, p. 553/539].

¹⁷ Публикувана в дисертацията (1863) на Gustav Roch (1839-1866) студент, 1861, на Bernhard Riemann (1826-1866).

¹⁸ Friedrich Hirzebruch (р. 1927) от 1952 до 1956 е в Принстън (САЩ), след това – професор в университета в Бон.

се желае в тази област, която свързва – неочаквано и красиво – комплексния анализ с топологията. И ето, че „тук се яви Гротендик, и каза ‘Не, теоремата на Риман-Рох не е за многообразия; това е теорема за морфизми между многообразия’. Това беше съвършено нова гледна точка, дори формулировката на теоремата бе напълно променена“ – казва Nicholas Katz (от Принстънския университет). „Това беше в духа на категориите и функторите ..., но самото твърдение беше изпреварило времето си с 10 години“ – добавя Борел¹⁹ ([J04] с. 1046). За да докаже своята теорема (валидна за произволно числово поле) АГ въвежда *K-групи* (сега наричани *групи на Гротендик*), дали начало на K-теорията на Michael Atiyah и на Хирцебрух.

За читател с обща представа от комплексния анализ, желаещ да разбере нещо по-конкретно, ще се опитам да поясня поне за какво става дума в класическата теорема на Риман-Рох. Ще започна с едно отличително свойство на компактните риманови повърхнини (достъпен увод, към които представляват лекциите за млади учени на Васил Цанов, *Риманови повърхнини*, Изд. на БАН, София 1987): функциите с единствен полюс от даден ред в дадена точка образуват крайно-мерно векторно пространство. Ако функциите нямат полюс (т.е., ако полюсът е от ред нула) теоремата на Лиувил (1809-1882) ни казва, че те са константи, с други думи, тяхното пространство е едномерно. Оказва се, че размерностите на тези пространства се определят от топологичната характеристика, рода g , на повърхнината. За сферата, т.е., при $g=0$, и ред на полюса 0, 1, 2, ..., съответните размерности са 1, 2, 3, ...; за тора, т.е. за $g=1$, те са 1, 1, 2, ... (Втората единица за тора – вместо двойката от сферата – изразява дълбока теорема: всяка двойно периодична (елиптична) функция в комплексната равнина е или константа, или има поне два полюса.) Теоремата на Риман-Рох дава обща формула за размерностите като линейна функция на рода. (Тя се записва днес като формула за въведеното по-късно понятие *дивизор* – виж историческия увод: J. Gray, *The Riemann-Roch theorem and Geometry*, 1854-1914 – достъпен в Интернет.)

Гротендик има щастието да започне кариерата си в златна ера за френската математика (и за Бурбаки). Неговата научна кореспонденция с Ж.-П. Сер (публикувана през 2001), от която водят началото си много от неговите идеи, започва през 1955, когато АГ е в Канзас (след Бразилия). Върнал се в Париж през 1956 (на място в CNRS²⁰), той докладва своето обобщение на теоремата на Риман-Рох през юли 1957 на първата работна среща (*Arbeitstagung*), организирана от Хирцебрух в Бон. Но, странно, резултатът е публикуван от Борел и Сер, а не от него. През есента на 1957, АГ скицира, в писмо до Сер, който е в Принстън, доказателство на теоремата. Борел и Сер организират там семинар, за да се опитат да го разберат. АГ, който преди края на 1957 загубва майка си, предлага на колегите си сами да напишат и публикуват записките

¹⁹ Armand Borel (1923-2003) швейцарец, професор в Institute for Advanced Study (IAS) в Принстън (1957-1993).

²⁰ Centre National de la Recherche Scientifique – организация за научни изследвания във Франция, аналог на БАН.

от своя семинар, което те и правят. (Според Борел, АГ не публикува сам теоремата, защото доказателството ѝ не удовлетворява неговия идеал за пълна естественост на всяка стъпка: то съдържа трик – виж [J04] с. 1046.)

АГ тежко преживява смъртта на майка си: престава да се занимава с математика, мисли да стане писател (да реализира мечтата на Ханка, така и не завършила своята повест?). Все пак повикът на математика надделява и той се връща към своите незавършени построения. Идва 1958, може би най-плодоносната година в неговия математически живот. (Тогава той живее с Мирей (Mireille Dufour), приятелка на майка му, доста по-възрастна от него; по-късно те се оженват и имат три деца: Йоханна (1959), Матвей (1961) и Александър (1965).)

„Златните ябълки от градината на Хесперидите“ (по цветистия израз на Картие [C]) са по това време знаменитите догадки на Вейл (1949, 1954) [W], които свързват броя на точките на система от полиномиални уравнения върху крайно поле на Галоа, задача за преброяване от дискретната математика, с топологични характеристики (числата на Enrico Betti, 1823-92), които определят кои величини остават неизменни при непрекъснати деформации. АГ го казва по-добре: „Числото“ е способно да улови структурата на прекъснатите или дискретни системи, които се състоят от изолирани един от друг обекти, без възможност за непрекъснат преход между тях. ‘Размерът’, напротив, е свойство, което се подава на непрекъснато изменение. Той е способен по този начин да обхване структурата на непрекъснатите явления: движението, пространството, многообразието от всякакъв вид, силовите полета ... Аритметиката се явява като наука за дискретните структури, а анализът – като наука за непрекъснатите. ... За пръв път виждението за *аритметична геометрия* се зароди под формата на хипотезите на Вейл.“ [G:P10].

За читатели, които не се боят от висша математика, тези хипотези могат да се резюмират така. Вейл кодира броя на точките на проективно алгебрично многообразие върху система от вложени крайни полета чрез тяхната пораждателна функция; тя се оказва локално обобщение на римановата *дзета функция* $\zeta(s)$ (въведено в частни случаи в дисертацията на Артин²¹ от 1923). Догадките (които Вейл доказва за едномерно многообразие – т.е. за проективна крива) гласят: (1) възникващата дзета функция е рационална спрямо подходящо избрана променлива (по-точно, тя е отношение на произведения от полиноми, чиито степени се дават с числата на Бети); (2) тя удовлетворява функционално уравнение; (3) Нулите на дзета функцията удовлетворяват условие, което в случай на едномерна крива X се свежда до хипотезата на Риман: (нетривиалните) нули на $\zeta(X, s)$ принадлежат на правата от комплексни s с реална част $\text{Re } s = 1/2$.

Сер преформулира (през 1955) хипотезите на Вейл в кохомологични термини, контекст, способен да привлече Гротендик. През август 1958 АГ изнася пленарна лекция на конгреса на математиците в Единбург. Той скицира с ясноточна точност своята програма за построяване на естествен дом за хипотезите на Вейл (и за тяхното доказателство) през следващите 12 години.

²¹ Emil Artin (Виена, 1898 – Хамбург, 1962) – австриец от арменски произход, водещ алгебрист на своето време.

През есента на 1958 АГ е за пръв път в математическия факултет в Харвард. (Като пример за неговата непрактичност, разказват, че преди да заминат, дал на Мирей, която пътува с него, свой любим роман, за да си усъвършенствува тя английския. Романът бил *Моби Дик* – [J04] с. 1047.) В писмо до поканилия го Зариски²² АГ пише, че той няма да обещава да не работи за сваляне на американското правителство, както се е изисквало за да му дадат американска виза (която той все пак получава). David Mumford (автор на книги по алгебрична геометрия, тогава студент на Зариски) си спомня за поразяващите скокове към абстракции в лекциите на Гротендик. На въпрос как се доказва една от лемите АГ отговорил с толкова абстрактно разсъждение, че Мъмфорд не повярвал, че то може да докаже такъв конкретен резултат. След няколко дни мислене по въпроса, той си дал сметка, че всичко е точно. „Той така оголва проблема, че ти се струва, че нищо не е останало от него. И тогава той изважда наяве неговата истинска структура от ‘нищото’.“ ([J04] с. 1049)

4. „Idées maîtresses“²³ на Гротендик: IHES (1958-70)

В течение на 25 години, между 1945 (когато бях 17) и 1969 (когато наближавах 42), влагах практически цялата си енергия в математически изследвания. А. Гротендик [G:P7]

Когато Léon Motchane (1900-90) основава IHES (през юни 1958), той кани Дийодоне като пръв професор-математик. Дийодоне приема при условие, че бъде поканен и блестящият пост-док от Нанси, 30-годишният Гротендик. АГ пише (след още 28 години) с топлота за Дийодоне и за неговата способност да се възхищава: „Добре си спомням, че в групата шумни приятели ..., които олицетворяваха за мен математичната среда, имаше място всеки момент за възхищение – най-ясно изразено у Дийодоне. Това беше чисто възхищение (émerveillement), на което не можеше да се устои, в което всяка следа от самоизтъкване беше изчезнала. Сега,



С Жан-Пиер Сер през 1958 г.

²² Oscar Zariski (1899-1986), роден в Полша, учи в Рим при италианските алгебрични геометри, професор в Харвард (1947-69). АГ обобщава и включва в своята програма неговата теорема за холоморфни функции.

²³ “Главни идеи” или “идеи – любовници” – израз на Гротендик [G:P8], възприет и от неговия ученик, [D98].



С Майкъл Атия (Бон, 1961?)

когато си спомням за него, си давам сметка, че то само беше сила, която той излъчваше и оказваше непосредствено, незабавно въздействие на всички около себе си“. [G:I.37]. Дийодонне е навършил 50, възрастовата граница, която Бурбаки е наложил за участие в писането на неговия трактат; написал своята най-интересна работа – за формалните групи, и се поставя в служба на нов амбициозен проект.

По свидетелството на колеги, АГ работи безспир „12 часа дневно, 7 дни в седмицата, в течение на 20

години“. Резиденцията за работещи в IHES се заключава в 11 вечерта, но сътрудници, прекарвали вечер в Париж, нямат проблем да си влязат къщи. Колкото и късно да се прибират, те намират АГ да работи до осветения прозорец на своята спартанска квартира – и готов да им отвори ([J04] с. 1198).

Всеки вторник АГ води семинар, който трае целия ден – заедно с дискусиите по време на обяд. IHES става притегателен център за млади математици (не само от Франция). АГ формулира грандиозна програма, призвана да обедини аритметиката и топологията в една нова алгебрична геометрия. Строител на катедрала, по собственото му сравнение, той разпределя задачите в своя екип. Наближаващият 60 Дийодоне, човек на дълга и на традицията, работи всяка сутрин, от 5 до 8, над не особено четливите ръкописи на своя студент от Нанси [C]. Резултатът е 8-томен трактат *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) – малка част от първоначалния замисъл на Гротендик²⁴. Според А. Борел, единствено АГ вижда нещата глобално, докато Дийодоне ги разбира само ред по ред, в резултат на което стилът е доста тежък, [J04] с. 1050. Оценката на АГ, [G:I.38], е по-великодушна: „Това, което правеше от Дийодоне мечтан служител на голяма кауза, било в проекта на Бурбаки или в нашето сътрудничество, бе неговата душевна щедрост, липсата на всяка следа от суетност в неговата работа и в избора на неговите големи вложения.“ Естествено, днес се намират по-компактни текстове по алгебрична геометрия, но никой от тях не предлага такова пълно изложение на основите на предмета. Фалтингс²⁵, до 1994 професор в Университета в Принстън, препоръчва на своите докторанти оригиналните томове на EGA.

²⁴ Завършени са 4 от заявените 13 раздела: първите два заемат по един том, третият е в два, а четвъртият – в четири.

²⁵ Gerd Faltings, сега директор на математическия Институт „Макс Планк“ в Бон, получава Филдсов медал (1986) за своето доказателство на хипотезата на L.J. Mordell (1888-1972), което използва построенията на Гротендик.

По същото време в IHES започва публикацията и на Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA), 7 тома, вдъхновени (в началото и писани) от АГ и (дописвани) от негови ученици. „Моята работа през тези години на интензивна продуктивност се характеризира количествено с около 12000 публикувани страници ... и със стотици, ако не хиляди, нови понятия... Едва ли в историята на математиката ще се намери друг, въвел в нашата наука толкова нови понятия и, заедно с това нови термини, които ги изразяват с всичките им тънкости, подсказвайки техния смисъл“ [G:P7]. Интересно, че АГ разглежда даването на имена, като част от математическото творчество. За жалост, погледът върху работата, който предлагаме, не отива много по-далеч от цитирането на три от тези имена. Нека започнем, обаче, с един импресионистичен увод от късния Гротендик.

„Понятието за „пространство“ е между най-древните в математиката. То е толкова основно за нашето 'геометрично' възприятие на света, че остава неизказано през повече от две хилядолетия. Едва през 19 век то почва да се отърсва от тиранията на непосредственото възприятие (на едно и също 'пространство', което ни заобикаля), и от неговото традиционно 'евклидово' теоретизиране, и придобива собствена динамика... То е многолико, в зависимост от структурите, които се влагат в него – от най-богатите (евклидови, афинни, проективни ...) до най-аскетичните, в които всяка количествена информация изглежда безвъзвратно изчезнала, а е останала само качествена квинтесенция на понятието за близост и най-изпълзващият се вариант на интуицията за ('топологична') форма... Изучаването на такива пространства е обект на един от най-увлекателните раздели на геометрията – *топологията*.

Колкото и неуловима да изглежда структурата на 'чисто качество' ... през миналия (19-и) век математиците успяха да напъхат тези пространства в стегната и гъвкава мрежа на език, скроен по тяхна мярка. Нещо повече, те изобретиха и изготвиха еталони на 'метри' или 'аршини', за да могат, въпреки всичко, да въведат някакви мерки (наречени „топологически инварианти“) за тези пространства-пипала. Вярно е, че най-съществените от тези инварианти имат по-фина природа от „число“ или „величина“: те са сами нови математични структури, съотнесени към разглежданите пространства. Едни от първите и най-съществени от тези инварианти (въведени от Бети) са образувани от различни „групи на кохомологии“, асоциирани с пространството... Нов тласък даде понятието за (абелев) *сноп* над едно пространство, с който Лъоре свързва редица от такива групи ... Като че ли добрият стар „кохомологичен метър“, с който разполагахме, изведнъж се превърна в множество нови „метри“ с всевъзможни размери и форми, всеки от които ни дава прецизна информация от своята област ... Това е една от решаващите идеи, появили се през този век. Благодарение на последвалите работи на Жан-Пиер Сер, идеите на Лъоре доведоха до пробив в теорията на топологичните пространства и на техните *хомотопични* инварианти. Моите геометрични работи са продължение на развитието на Сер, и с това, на новаторските идеи на Лъоре“ [G:P12].

Първите десетилетия на 20-век са свидетели на революцията, провъзгласена от Айнщайн (1879-1955), на физическото понятие за пространство. Тя се базира на развитието на римановата геометрия и на намирането на групата на инвариантност

на уравненията на Максвел, както и на анализа на понятието за едновременност от Поанкаре²⁶. (Математичните влияния се проявяват във физиката в обратен ред: Поанкаре и Айнщайн формулират принципа на относителността през 1905, а Айнщайн и Хилберт²⁷ стигат до съвременната общо-ковариантна теория на гравитацията, основана на геометрията на Риман, през 1915.) Ако за теорията на относителността са чували „всички“ (дори да не я разбират), малко са хората, които изобщо подозират за фундаменталните промени в математическото понятие за пространство, короновани от работите на Гротендик²⁸.

„Отгърсването от тиранията на възприятието“, за което говори АГ в цитирания текст, започва с появата на неевклидовата геометрия, поразила въображението на образования свят от средата на 19-и век. Следващата важна стъпка прави Риман: той допуска кривината да се мени от място на място и така открива пътя за разглеждането на метриката като физическа променлива. Развитието на математиката след Втората световна война започва с обобщаване на понятието точка и стига до неговото почти пълно изгонване от представата за *многообразие*. (Вдъхновеният исторически преглед в [С98] започва с идеята на Гелфанд за спектър, развита и приложена в некомутативната геометрия на Ален Кон, и завършва с мечтата за „космическа група на Галоа“.)

Визията на Гротендик за многообразие се концентрира в прогресията от понятия с нарастваща общност: *схема* → *топос* → *мотив*. Класическото определение на понятието за алгебрично многообразие като множество от нулите на система от полиномиални уравнения от n променливи не е *вътрешно*: то зависи от n -мерното (реално или комплексно) пространство, в което е вложено като (алгебрична) повърхност. Стъпката от вложени гладки повърхности, разглеждани от Гаус²⁹, към вътрешно определени гладки многообразия е едно от основните постижения на Риман. Нейното пряко обобщение за алгебрични многообразия не върви, защото няма достатъчно много полиномиални функции, които да служат като функции на преход (не е в сила аналог на теоремата за неявни функции). Тук идва на помощ понятието *схема*, използвано в по-тесен смисъл от Шевале; АГ го въвежда и налага в неговата естествена общност. Цената е, че „точките“, които се отъждествяват със спектъра на схемата, губят, в общия случай, своя интуитивен смисъл. Вече на това първо ниво случаите на дискретно и на класическо (непрекъснато) многообразие се получават като частни случаи. Терминът

²⁶ За недооценения френски математик и физик Henri Poincaré (1854-1912) виж *Светът на физиката* 4 (2005) 405.

²⁷ АГ разглежда David Hilbert (1862-1943), заедно с Évariste Galois (1811-32) и Риман като свои предшественици.

²⁸ По думите на АГ [G:P21], „Тази кратка екскурзия при ‚съседите отсреща‘, физиците, може да служи като репер на читателя, който (като повечето хора) нищо не знае за света на математиците, но без друго е чувал за Айнщайн и за неговото фамозно четвърто измерение, а може би дори и за квантовата механика.“

²⁹ Carl Friedrich Gauss (1777-1855) избира темата (за основите на геометрията) на встъпителната лекция на Риман.

топос (виж [I]) от гръцкото *τοποίς* (местоположение) е въведен от Гротендик, за да опише най-общо топологично пространство. Ако схемите съдържат много необичайни точки, то топосите изобщо не се нуждаят от точки. Класически, топологията на едно многообразие се задава чрез система от околности на всяка точка. При топосите остава само *решетка от отворени множества* (т.е. съвкупност от околности с най-малък и най-голям елемент – „вакуума и вселената“, и такава, че сечението и обединението на две околности е отново околност). АГ предлага по този повод рядка за него физична аналогия: „В квантовата механика традиционната 'материална точка' изчезва, за да се замени с 'облак от вероятности' ... В подобна нова оптика се чувства още по-дълбока 'мутация' на нашите механични представи отколкото в теорията на Айнщайн... Тези 'вероятностни облаци', които заместват добрите стари материални точки, странно ми напомнят изплъзващите се 'отворени околности', които населяват топосите, около въображаеми точки...“ [G:P20]. Гротендик включва в картината идеята на Риман, че многозначните аналитични функции живеят не в равнината, а върху многослойна риманова повърхнина. Разслоените риманови повърхнини се проектират една върху друга и образуват обектите на *категория*³⁰. „Както често става в математиката, на нас ни се удаде (благодарение на идеята за сноповете, или на 'кохомологичните метри') да изразим едно понятие (в случая 'пространство') чрез друго ('категория')... Така, топологична по своята природа ситуация, въплътена в дадено пространство, се представя в ситуация с алгебрична природа, въплътена в категорията.“ [G:P13] „Кохомологичните метри“ ни водят до това, което АГ нарича „най-дълбоката тема, която съм въвел в математиката (поне в моя 'публичен' период) – *мотивите* (родени от темата на *еталната*, или ℓ -адична, *кохомология*)³¹... За да дам израз на интуицията за родство между различните кохомологични теории, аз разкрих понятието за (общ) *мотив* на едно алгебрично многообразие... Това е, изказана на нетехнически език на музикална метафора, квинтесенцията на тази детски проста и едновременно деликатна и смела идея... Теорията на мотивите, с цялото си поразително структурно богатство, остава в много отношения хипотетична. (През всички тези години (1963-69), обяснявах своето виждане за мотивите, на всеки, който искаше да слуша ... без да си дам труда да напиша каквото и да било черно на бяло³² ...)“ [G:P16].

³⁰ Виж педагогичния исторически увод към теорията на категориите (и нейните приложения във физиката) в [BL].

³¹ АГ въвежда мотивите в писмо до Сер от 1964. Мечтата за мотивите на Гротендик се основава на неговите и до днес недоказани ‚стандартни хипотези‘ – виж лекцията на Милн [M09]. Из увода към [G]: Parmi toutes les choses mathématiques que j'avais eu le privilège ... d'amener au jour, cette réalité de motifs m'apparaît encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystère – au cœur même de l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique.

³² Юрий Манин, автор на първата публикация за мотивите (от 1968), показваше на конференцията в IHES през януари 2009 листата изписани от АГ през лятото на 1967, когато му е развивал своите идеи.

5. Учител и ученици. Нов начин на мислене

Моята амбиция като математик, през целия ми живот, или по-скоро моята радост и страст бяха да откривам очевидното... Гротендик [G: x]

През 1962 IHES се настанява в своето постоянно жилище, в парка на разрушен от бомба замък. Върнал се наскоро от Харвард, Гротендик подновява своя семинар на необичайна сцена: в зала с огромни прозорци, създаващи илюзията, че докладите се изнасят в парка. Атмосферата, е „фантастична“ ([J04] с. 1053). Около АГ се събира група блестящи млади математици, готови да приемат новото евангелие. Той не жали себе си, когато работи с ученици.

Анри Картан⁹ препоръчва на своя студент тополог Люк Илюзи (от университета Paris-Sud) да вземе тема за докторат при Гротендик – „богът на алгебричната геометрия“. АГ го посреща дружелюбно и, след като го разпитва с какво се е занимавал, отива до черната дъска и започва да му говори (за снопове, условия за крайност и пр.): „Беше като море, като непрекъснат поток от математика“, си спомня Илюзи. Накрая АГ му казва, че следната година (1964) ще посвети на L-функции и на ℓ -адична кохомология, а Илюзи ще му помага за подготовка на текста. На уплашените думи на Илюзи, че той не знае нищо от алгебричната геометрия, АГ отговаря, че това няма значение: „Ще научиш бързо.“ И Илюзи научава. „Неговите лекции бяха тъй ясни, той правеше усилие да напомни всичко необходимо, всичко, което се използва; беше прекрасен учител, търпелив, умееш да обяснява всичко ясно. Той отделяше време да обяснява най-прости примери, които показват как работи построението.“ Той е от онези (френски) математици, за които Едуард Нелсън от Принстън казва с похвала, че не се боят да формулират очевидното. АГ предлага на Илюзи да развие три раздела от SGA 5. „Треперех като му давах готовите записки.“ След две-три седмици АГ го кани въщи да ги обсъдят. Той изважда на масата записките, черни от бележки с молив. Двамата седят няколко часа, докато АГ се спира на всеки коментар. „Той можеше да критикува запетайка или точка, но критикуваше и много задълбочено по същество, често предлагаше нова организация на материала ... Случвало се е човек да бъде докаран до сълзи след подобна среща с АГ. Някои не издържаха и си сменяха ръководителя... Но това не бяха дребнави критики.“ ([J04] 1053-54)



С Карин Тейт в Париж, 1964

АГ предлага на новодо-

шлия, 1968, в IHES, 25-годишен „пост-док“ Н. Кац (от Принстън – споменат в 3.) да направи доклад на семинара за *моливи на Лефшец*³³. Кац протестира, че само е чувал термина, но нищо не знае за него. „Но до края на годината направих няколко доклада, които станаха част от SGA 7; това имаше голям ефект за бъдещата ми работа.“ АГ демонстрира „удивително прозрение коя задача е подходяща за даден човек. И той имаше невероятно обаяние като математик: хората смятаха за привилегия да участват в реализиране на неговата далекобойна визия.“ Мазур (Barry Mazur, друг младеж, посетил IHES, сега професор в Харвард) също говори



Семинар по алгебрична геометрия в IHES

за таланта на АГ да „съчетава проблемите с подходящи хора. Хваща те и ти поставя задача, която е точно това, което най-добре ще проясни твоя кръгозор“ ([J04] 1054).

Наред с учениците (12 на брой – символите играят роля! [C]) АГ поддържа обширна математическа кореспонденция. Робин Хартсхорн от Беркли, през 1961 посещава лекциите на АГ в Харвард и взема от тях идея за темата (за схеми на Хилберт) на докторската си дисертация. След като я защитава, той праща копие от нея на АГ (вече в Париж). Отговорът започва с кратка похвала на тезата. „Следващите 3-4 страници са пълни с неговите идеи за нови теореми, които бих могъл да докажа, и за други въпроси, които човек би могъл да си постави“, свидетелствува Хартсхорн. След това АГ се връща към тезата и изпълва три страници с подробни коментари. Хартсхорн предлага да проведе семинар в Харвард по теория на дуалността – тема, която АГ е предложил още на конгреса в Единбург (1958). През лятото на 1963 АГ го захранва с около 250 страници „предварителни бележки“: да послужат за основа на семинара, който Хартсхорн започва през есента. Въпроси от аудиторията му помагат да уточни нещата и той почва да пише систематичен текст, като праща готовите глави на Гротендик. АГ ги връща изпъстрени с поправки. „Аз поправях всичко и му пращах новия вариант, който се връщаше обратно с още червено мастило.“ Давайки си сметка, че този процес може да не свърши никога, Хартсхорн изпраща един хубав ден ръкописа

³³ Solomon Lefschetz (Москва, 1884 – Princeton, 1972), загубил ръце като инженер, той става математик – алгебричен геометър и тополог; за „моливите“ виж R.E. Gompf, What is ... a Lefschetz pencil? *Notices AMS* 52 (2005) 848-850.

на издателя³⁴. АГ „беше толкова пълен с идеи, че намираще работа на всички сериозни алгебрични геометри по онова време.“ ([J04] с. 1054-55).

Гротендик преобразява съвременната математика. За него същността на даден обект се разбира, когато открием връзките му с други обекти. Самите въпроси се променят: пита се не *какво е* (нещо), а *на каква категория принадлежи*. С невероятен дар за абстракция, АГ вижда проблемите в най-общ контекст и го прави изискано точно. „Всеки път той успява да оголи въпроса, така че да не е частен случай, но същественото да е останало“ [J04] с. 1196. За разлика от неговите епигони, той не търси общност заради общността. Езикът, който той създава, помага да се решат най-интересните проблеми: догадките на Вейл, хипотезата на Мордел. Неговата гледна точка, която обхваща преди всичко алгебричната геометрия, е толкова естествена, че за новото поколение е трудно да си представи, че нещата някога са били различни. (За мен, завършил образованието си през 1956, промяната на стила в математичните списания през 60-е години беше шокираща – трябваше да се уча отново, за да разбирам за какво става дума.)

6. Завоят. Медитации. Жътва и посеви (1970-90).

Зад мен са 20 години на интензивно математично творчество, на прекалено математично отдаване – и в същото време, 20 дълги години на духовен застой, в „затворена саксия“... [G:L3]

Изключителната концентрация върху математиката в течение на десетилетия (според колеги, той не отделя време дори да прегледа вестник) предпазва АГ от проблемите наоколо и в самия него. С благородни пориви, склонен към революционни възгледи, възприети от родителите, които боготвори, с детство в лагер и като момче без гражданство – Гротендик живее като в златна клетка: той е благополучен преуспяващ учен. Признаци за назряващ прелом (за непосветените, дошъл като гръм от ясно небе – през 1970) могат да се открият по-рано. През 1964 неговият по-стар съратник Дийодонне отива в Ница (като декан на нов математически факултет) и става ясно, че грандиозният проект EGA се задъхва. Първата политическа проява на АГ е през 1966, когато той отказва да отиде на Конгреса на математиците в Москва, където трябва да получи Филдсов медал³⁵, в знак на протест срещу преследването и затварянето на писателите Синявски и Даниел. Тази акция му навлича неприязънта на ортодоксалните комунисти, които все още задават тон всред левите интелектуалци и студентите-бунтари във Франция³⁶ (виж [Sch] с. 935). (Явно, баща му, гонен от Ле-

³⁴ R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes on a work of A. Grothendieck, Springer, 1966.

³⁵ Fields Medal – най-престижната награда за математик (под 40 години), която се дава веднъж на четири години.

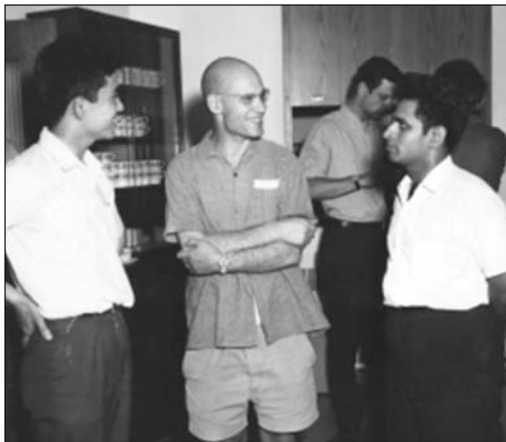
³⁶ V. Roénaqu, професор в Orsay (Франция), роден в Румъния, пише за АГ: „В края на 1962, той беше практически единственият ми парижки колега, който точно разбираше какво ставаше тогава в Източна Европа“ ([P] с. 965).

ниновата власт в Съветска Русия, е предпазил момчето от разпространени илюзии.) АГ, на върха на славата си, при цялата си феноменална работоспособност, започва да проявява признаци на умора. През 1968 споменал пред Мазур, че ходил на кино – за първи път от 10 години ([J04] с. 1198). Следващото му политическо действие е пътуване до северен Виетнам за три седмици, през ноември 1967, в разгара на Виетнамската война. Върнал се обратно (с една виетнамка [С]), той изнася серия лекции в Париж (и другаде) през декември. АГ разказва за своите научни и лични контакти по време на американските бомбардировки, възхищава се от мъжеството на виетнамците и от усилията им да подкрепят науката и образованието в трудни условия, но критикува, макар и предпазливо, виетнамското правителство за насаждането на диалектическия материализъм и за прекаленото регламентиране на живота на хората. (Шарлау, [Sch] с. 935, отбелязва, че това е лична постъпка: тя не е част от организираните, включително и от ръководителя на тезата му, Лоран Шварц, протести срещу американската война.) Времената също предвещават промяна: студентските вълнения и бунтове през май 1968 не оставят никого равнодушен.

На този фон възниква конфликт с основателя-директор на IHES, Мочан, по повод на (малка) субсидия, която Институтът получава от военните. Никой от постоянните професори, не е във възторг от този факт, но те са готови на компромиси. АГ не е, и влиза в личен конфликт с директора. Неговата наивност и неосведоменост дразнят допълнително противниците му и го правят уязвим: колега³⁷ ми казваше, че той (АГ) не знаел даже смисъла на съкращението НАТО... Отношенията стават нетърпими, директорът го предизвиква (пише му, че не може да му плаща без парите от военното министерство) и АГ напуска (на 25 май 1970) с трясък *своя* институт. За негово огорчение, никой от неговите колеги (нито дори любимият му ученик, Делин', станал професор в IHES по негова препоръка година по-рано) не го последва в знак на солидарност. След 15 години, АГ вижда станалото в друга светлина: „Беше нужен силен тласък, за да ме откъсне от средата, в която бях пуснал дълбоки корени ... Този тласък дойде от конфронтацията с известна форма на корупция (безрезервно сътрудничество с военните), за която дотогава си затварях очите. С времето си давам сметка, че откъд събитието, имаше по-дълбока сила, която е работела в мен. Това беше *остра нужда от вътрешно обновление*. Такова обновление не можеше да се извърши и продължи в равнодушното обкръжение на научен парник на институт с висока репутация... Без да си давам сметка, аз се задушавях – имах нужда от чист въздух! Моето провиденциално 'напускане' отбеляза внезапния край на дълъг застой...“ [G:L3].

Заедно с „големия завой“ с напускането на IHES, АГ заменя (през близките 2-3 години) своята математическа страст с обществено политическа. Месец след напускането той говори пред препълнена аудитория на Университета в Орсе (близо до IHES) за опасността от ядреното оръжие, за това, че учените не трябва да сътрудничат по

³⁷ Louis Michel (1923-1999), първият професор в IHES по теоретична физика (от 1962); посещавал България.



В Университета на Монреал, 1970 г.

никакъв начин с военните; стига до там, че нарича занятията с математика вредни³⁸, защото способствуват за развитието на технологията. Същото лято, той създава групата „Survivre“ („Да оцелеем“, по-късно, „Survivre et Vivre“ – „Да оцелеем и да живеем“), предтеча на антивоенното зелено движение. Поканен на школата по алгебрична геометрия в Монреал (Канада), той отива с условието, че ще му дадат същото време за лекции по неговите екологични идеи и ще ги публикуват заедно с математичните му лекции (организаторите се съгласяват на всичко). Успехът му на новото попри-

ще е среден: първият бюлетин на движението съдържа списък от 25 човека, 18 от които са математици (освен студенти от школата, тук влизат старшите му колеги Шевале⁹

и Самюел³⁹; сред останалите е синът му, Серж, и тъща му, [Sch]); участник в канадската школа свидетелствуваше (в мое присъствие) пред биографа му, че ходил на математическите му лекции, но пропускал политическите...

По време на пропагандна обиколка на САЩ, той поражавя въображението на студентката по математика Жустин Скалба, която зарязва докторската си работа и тръгва с него. Във Франция те живеят в основана от АГ комуна в покрайнините на Париж; през 1973, скоро след като им се ражда син (Джон), АГ напуска столицата и ги помъква в малко селце, Вилекун,



Гротендик с децата си Серж и Йохана през 1960

³⁸ „nuisible“; текстът на доклада «*Responsabilité du savant...*» циркулира като ръкопис. Студентите са враждебно настроени, въпреки самоотречението на АГ. Техен лозунг е приведен в приложение към доклада: “Réussissez, ossifiez-vous, détruisez-vous vous-même: devenez un petit schéma télécommandé par Grothendieck.” (Преуспейте, вкостенете се, саморазрушете се: превърнете се в малка схема, управлявана от разстояние от Гротендик.)

³⁹ Pierre Samuel (Париж, 1921-2009), съавтор на Зариски²², секретар на Бурбаки след Дйедоне⁶ и преди Картие³.

на 60 км. от Монпелие; там нямат електричество – осветяват се на газена лампа. Макар че повече от времето АГ е любвеобилен, Жустин, разказва за негови бурни изхвърляния, следвани от периоди на мълчаливо отдръпване; понякога плашещи я монолози на немски (от който тя не разбира нито дума). Скоро те се разделят, Жустин се връща в САЩ (и се омъжва); но и 30 години по-късно, тя говори с благоговение за АГ ([J04] с. 1202).

Както и в Канада, Гротендик е готов, наред с обществената дейност (която за него е най-животрептяща), да продължи да се занимава с математика, но неговите колеги във Франция не проявяват широтата и благожелателността на организаторите на школата в Монреал. През 1972 АГ е кандидат в конкурс за професор в престижния Колеж де Франс⁴⁰. Тъй като той дава да се разбере, че ще използва мястото⁴¹ “за императивите на оцеляването“, избран е Титс (правилно, според Сер¹⁰, [J04] с. 1202). През 70-е години АГ прави опит да получи отново място в CNRS²⁰, но му е отказано, защото „не било ясно, че ще се занимава с математика“. Д. Рюел, колега (физик) на АГ от IHES, коментира, че ако АГ беше завършил някое от престижните училища или беше член на подходяща партия, щеше да му се намери достойно място. Но той не е даже френски поданик (нито поданик на някоя друга държава). „Никой не отговаря за него, той представлява само един неудобен проблем. Разбираемо е, че някои биха искали да стоварят на Гротендик цялата отговорност за неговото изключване: той полудя и напусна математиката. Но това не държи сметка за фактите.“ ([R] с. 66) Ще отбележим, обаче, че сам Рюел (а и никой от останалите колеги на АГ в IHES) не се е опитал да задържи там Гротендик. Това било „невъзможно“. Опитите на АГ да събира в комуни ентузиастични за своите нови идеи, не са успешни. Безделните хипита около него не приличат на младите математици „от преди пробуждането“, за които той е бил авторитет, на които е можел да поставя задачи и да разчита, че ще бъдат изпълнени. Тъй или иначе, той се загубва – отива през 1973 като професор в Университета в Монпелие⁶, където е учил. „Както знаеш, изоставих 'големия свят' на математиката, 1970 ... След няколко години войнстващ екологичен антимиитаризъм, стил 'културна революция', ... аз практически



Къщата във Вилекун, в която Гротендик живее от 1973 до 1979

⁴⁰ Collège de France, преименуван така през 1870, е основан от крал François I през 1530 като Collège Imperial.

⁴¹ на пенсиониралия се Szolem Mandelbrojt (1899-1983), за което се състезава с Cartier и Jacques Tits (Белгия, 1930-).

изчезнах от циркулация, загубен в някакъв провинциален университет, Бог знае къде. Мълвата твърди, че си прекарвам времето да паса овце и да копая кладенци. Истината е, че ходех честно, като всички, да чета лекции във факултета...“ ([G:L2]). Наистина, АГ чете лекции на всички нива. „Студентите не подозираха, че виждат пред себе си велик математик. Явяваше се в износени дрехи на хипи и раздаваше на слушателите домашно отгледани ябълки. Определено не обясняваше нещата линейно, както е прието за начинаещи, но неговите лекции вдъхновяваха, и говореха за чудна, тайнствена, ‘голяма картина’.“ – спомня си студентка от тогава ([J04] с. 1205).

„В живота си съм имал три големи страсти. Накрая си дадох сметка, че зад тях стои един и същ дълбок импулс: стремежът към познание... Първа се прояви страстта ми към математиката... Познах математиката дълго преди да позная първата жена (освен тази, която познавам от рождение), и днес, в зряла възраст, тази първа страст още не е утихнала... Втората моя страст беше търсенето на жената... Тя се прояви напълно само след смъртта на майка ми (пет години след първата ми връзка, от която се роди мой син)... Денят, когато се появи моята трета страст – през една октомврийска нощ на 1976 – изчезна големият страх от познанието. Това е страхът от действителността, от смирените истини, преди всичко за мен и за най-близките ми хора... Щом се появи любопитство – няма страх...“ [G:I.35]. „В тази нощ открих за себе си *медитацията*: труд за откриване на самия себе си... Само силна жажда за познание можеше да преодолее желанието за бягство от тревожните мисли... Тази жажда ме водеше часове наред към сърцето на конфликта – както силното желание за любов ни води безпогрешно към сърцето на любовната... За мен и до сега записването е ефикасно и необходимо пособие... Внимателният подбор на думи играе важна роля в медитацията...“ [G:I.36]. „Явно, имаше с какво да се занимавам до края на живота си.“ [G:L2]. Но страстта на Гротендик към математиката се връща – за негова собствена изненада. През учебната 1980-81 година той води семинар (с един (!) слушател, Malgoire; в Париж биха били повече...) за съотношението между групите на Галоа и на фундаменталните групи (на Поанкаре). Завършва, през 1981, ръкопис от 1300 страници за „Дълъг поход през теорията на Галоа“, който Малгоар частично публикува през 1995. „Той беше като извънземен... Беше очарователно да се работи с гений“ – разказва друг негов млад сътрудник от Монпелие. „Не обичам тази дума, но за Гротендик няма друга... Беше очарователно, но едновременно и страшно ... Спомените за работа с него до късно през нощта, под светлината на газена лампа са най-силните спомени в моя живот...“ ([J04] с. 1206).

АГ чувствава, че няма какво повече да прави със слабо мотивирани студенти и отново подава документи, през 1984, за да бъде приет за сътрудник в CNRS. Получаването на място за него пак не е лесно, макар че програмата, която предлага, [G84], необуздан израз на математическо въображение, още храни математиците. По същото време (1983) Гротендик пише друга голяма математична работа⁴², започната като писмо до колега от

⁴² *À la poursuite des champs* (на английски *Pursuing stacks*) *Преследване на разслоени категории*, 1500 страници.

Оксфорд. Пред завършването, решава да каже няколко думи как и защо се връща – след 15 години – към нови *математични размишления*. След година и половина този „увод“ се разраства в самостоятелна книга от повече от 1300 страници. Така възниква *Жътва и посеви* [G], многократно цитираните досега *Размишления за миналото на математика*. „Има много неща в *Жътва и посеви*: опит за откриване на едно минало; *медитация* за съществуването; *портрет на нравите* на една среда и епоха (или портрет на едно коварно и неумолимо хлъзгане от една епоха в друга⁴³); ...; възхвала на *познаването на себе си*; *моята изповед*; ...; *обвинителна реч* (безмилостна, както се полага), или *разчистване на сметки* всред „математичния елит“ (без да правя подаръци)“ [G:L2].

Жътва и посеви е наистина трудно до се класифицира. За човек, който иска бързо да се ориентира, композицията изглежда сложна. Материалът е групиран в четири книги, всяка включваща повече от 50 номерирани параграфа и още толкова подлистни бележки, с грижливо подбрани, запомнящи се заглавия. (Гротендик е майстор на словото; майчиният му език е немски, но френският му е извънредно богат и колоритен.) Но книгата е написана със страст (и хапливо): веднъж зачетен, текстът увлича и читателят забравя за сложната му структура. В първата книга, *Самодоволство и обновление*, изпълнена с проникателни (само)анализи, той описва как атмосферата на доброжелателство, с която е посрещнат в кръга на Бурбаки, постепенно изчезва. Математиката се превръща в начин за печелене на власт, водещите математици стават важни фигури, от които се страхуват. Без да се щади, той разказва как сам е допринасял за тази печална промяна и как духът на спортно съревнование потиска способността му да се отвори към красотата на *математичните неща*. Завършвайки първата книга, „аз предчувствах скритата реалност на едно *погръбене* на моето творчество и на самия мен, която внезапно и неудържимо ми се стовари и то със своето име, „Погребението“, на 19 април 1984“ [G:L3]. Свидетелствата и размишленията на АГ на тази тема, заемат следващите три тома (общо повече от 1000 страници). Той обвинява Делин⁴ и други свои ученици, че са напуснали подготвените от него строителни площадки, като си дигнали инструментите, които им харесват; че си присвояват неговите идеи, без да го споменават; че игнорират новите му ученици и последователи... Но *Размишленията* не се изчерпват с подобни обвинения. Книгите поразяват със своята красота и проникновения. [J04] с. 1209. „Чета от две-три години *Жътва и посеви* и този чудесен текст ми помага да живея, както със силата на идеите, така и с яснотата и с мъдростта, с които анализирате това, в което се е превърнал светът на математиците и всичките поуки, които извличате от това... Всеки, комуто давах да чете най-малкото дългия увод, беше развълнуван от този текст; става дума за хора далеч извън кръга на математиците, за артисти, хора на театъра, музиканти, а също и прости души, които го приеха като откровение.“ пише Ален Кон⁴⁴ на АГ за рождения му ден (март, 2008).

⁴³ Пример за това читателят ще намери в откъса *Сбогуване или: чужденците* в този брой на *Светът на физиката*.

⁴⁴ Alain Connes (Collège de France и IHES; Филдсов медал, 1982) любезно ми предостави копие от своето писмо.

7. Епилог – без поука

Вече не съм заложник на несвършиващи задачи, които спираха моя устрем към непознатото... Ако възрастта ми донесе нещо, то е лекотата. [G84]

През 1988 Шведската Кралска академия присъжда наградата Крафорд⁴⁵ на Делин' и на Гротендик за работите им по алгебрична геометрия. АГ се отказва с отворено писмо: „Научната етика (особено сред математиците) деградира до такава степен, че чиста кражба между колеги (особено за сметка на онези, които нямат власт да се защитят) е станала почти общо правило и, във всеки случай, се толерира от всички...“. Той изпраща на Академията екземпляр от [G] и добавя, че да играе играта на приемане на награди и почести би значило да приеме „духа на една нездрава еволюция в света на науката ...“. Писмото, публикувано в парижкия *Le Monde*, добива популярност сред интелектуалците ([J04] с. 1210). Същата година АГ се пенсионира. Малко след това излиза 3-томен сборник статии [Fest], посветен на неговата 60-годишнина, в който редактори и автори измежду най-остро критикуваните в [G] правят очевиден опит за помирение. АГ не приема подадената му ръка. Той е възмутен, че не са го предупредили за подготовката на томове, и пише, че неговото дело е използвано като конфети, хвърлени във въздуха с претенция за празник и чествуване, игнорирайки болестта отдолу ([J04] с. 1210).

Дали обвиненията на АГ са проява на параноя, както твърдят повечето математици, които имат думата? Всъщност, спорът е в интерпретацията на фактите, с които всички са съгласни. Ето повода за АГ да пише за „толерирана от всички кражба“. (Няма нужда да си специалист, за да разбереш за какво става дума.) Привеждам резюмето на АГ от [G:L14]:

„1) През 1963-69 въведох понятието за „мотив“; развих около него теория, останала отчасти хипотетична. Право или криво (няма значение), считам тази теория за моя най-дълбок принос в математиката на нашето време. Важността и дълбочината на „йогата на мотивите“ днес, впрочем, вече не се оспорва от никого (след като първите 10 години от моето напускане на математичната сцена даже и думата не се споменаваше).

2) В първата и единствена книга (от 1982), посветена на мотивите (и където това име, въведено от мен, фигурира в заглавието – виж [LNM]) единственият пасаж, който може да накара читателя да заподозре, че моята скромна личност има отношение към теорията, развивана в книгата, се намира на с. 261. Този пасаж (от два реда и половина) обяснява на читателя, че развиваната теория няма нищо общо с тази на някой си Гротендик (спомената тук за пръв и последен път без повече прецизиране).

3) Има знаменита „хипотеза на Ходж⁴⁶“, от която, ако е вярна, би следвало, че новата теория на мотивите, развивана в блестящата книга, съвпада с (твърде частен

⁴⁵ Други лауреати на Crafoord: Арнолд, Nirenberg 1982; Donaldson, Yau 1994; Connes 2001; Концевич, Witten 2008.

⁴⁶ Хипотезата на шотландеца W.V.D. Hodge (1903-1975) е от „проблемите на хилядолетието“ на института Clay.

случай на) онази, която развивах и обяснявах на всички почти 20 години по-рано.“

А ето и коментара на Сер¹⁰ по този повод: „Вярно е, че всеки знаеше, че той беше изобретил мотивите, например, или еталната кохомология, така че нямаше нужда той да бъде цитиран всеки път, когато се употребяват тези понятия. Това е причината, че името му рядко се споменава. ... Никой не е казал, че понятията са въведени от други.“ Официалната френска математика засега отказва да публикува *Жътва и посеви*⁴⁷. От друга страна, „имах случай да забележа дискретни знаци, показващи, че са си взели бележка, че лъвът се е събудил...“ [G:L14⁴⁸].

След пенсионирането си АГ живее в нарастваща изолация. Той медитира (което, по неговото определение, включва писане). Едва не умрял от глад по време на строг пост. Прекарвал нощи в пеене на религиозни химни. Имал (според Картие [C]) халюцинации, че пее на два гласа – със самия Господ-Бог. Изгорил голямо количество (25 000 страници?!) ръкописи, включително преписката между майка си и баща си от 30-те години (показва пепелта на Малгоар, комуто предоставя правата над своя математичен архив).

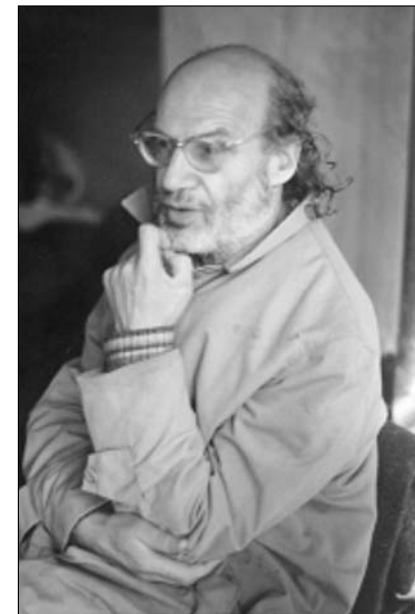
Две по-късни работи на Гротендик също могат да се открият в Интернет ([Sch] с. 938):

1987: *La Clef des Songes ou Dialogue avec le Bon Dieu* (Ключът към сънищата или диалог с дядо Господ, 315 с.), придружен от 691 страници (забележителни, според [Sch]) бележки (1988).

1990: *Les Dérivateurs* – 2000 страници свободен математичен текст, посветен на основите на теорията на хомотопиите, която АГ предава на Малгоар през 1995 ([J04] с. 1206).

Малкото математици, които са виждали АГ през 90-е години, свидетелствуват, че той се е заинтересувал сериозно от физиката, но изразил разочарование от липсата на строгост в нея. Това резонира с неговите думи от [G:P20⁷⁵]: „Предвиждам, че очакваното обновление ще дойде по-скоро от математик в душата, който е добре запознат с големите проблеми на физиката, отколкото от физик. Но най-вече, нужен е човек,

⁴⁷ „je trouve cela simplement révoltant“ (намирам това просто възмутително), пише Ален Кон в цитираното писмо. Голяма част от [G] е публикувана през 1990 в Япония, преведена от японец-математик от *Survivre* ([J04] с. 1208).



Гротендик през май 1988

отворен към философията, за да усети възела на проблема, който не е технически, а е фундаментален въпрос от 'философията на природата'.“ АГ задава (в писмо до един от последните свои приятели) обезоръжаващо простия въпрос: *Какво е метър?* ([J04] с.1211).

Прочел книга, която ме е развълнувала, не обичам да ми обясняват (или да ме питат), какво е искал да каже авторът. Нека не се опитваме да извлечем поука от живота на човека-легенда Александър Гротендик. По-добре да завършим с негови думи:

„... страст към математиката и страст към медитацията ... : Желанията на детето си следват, в течение на часове и дни, като движенията на танц, породени едно от друго.“ [G:I.43]

„Има едно измерение в самопознанието и в работата по откриване на себе си, което ги отличава от всяко друго познание и от всяка друга работа. Може би именно това е „забраненият плод“ от Дървото на познанието. Може би очарованието, което изпитах при медитацията, или по-скоро от тайните, които тя ми разкри, е очарованието от забранения плод?“ [G:I.46]

И последните думи на първия том, *Самодоволство и обновление*:

„Съзрях през последните 10 години тайнствени и много красиви математически неща. Те не са мои лични, те са направени, за да бъдат съобщени. Самият смисъл на съзирането им е, така го чувствавам, да ги съобщя, за да бъдат подхванати, разбрани, асимилирани... Но за да ги съобщя, трябва да ги задълбоча, да ги развия поне малко – а това е *работа*... докато *друга* работа ме чака, която само аз мога да свърша. Но не е в моите възможности, а и не е моята роля да управлявам сезоните в своя живот.“ [G:I.50]

Цитирана литература

[BL] John C. Baez, A. Lauda, A prehistory of n-categorical physics, arXiv:0908.2469[hep-th] (129 p.).

[C98] Pierre Cartier, La folle journée de Grothendieck à Connes et Kontsevich, Évolution des notions d'espace et de symétrie, dans: *Les Relations entre Mathématiques et la Physique Théorique*, Festschrift for the 40th anniversary of the IHÉS, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette 1998, pp. 23-42; English translation: A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich, *Bull. Am. Math. Soc.* **38**:4 (2001) 389-408.

[C] P. Cartier, Un pays dont on ne connaît que le nom (Grothendieck et les „motifs“), Bures-sur-Yvette, IHES/M/09/01; *Le Réel en Mathématiques* (P. Cartier, N. Charraud, eds.) Agalma 2004.

[DLP] J.-F. Dars, A. Lesne, A. Papillaut, *Les Déchiffreurs, Voyage en mathématiques*, Belin, 2008; English translation: *The Unravelers, Mathematical Snapshots*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA 2008.

[D08] Philip J. Davis, The early background of genius (Book Review), *SIAM News*, December 2008.

[D98] Pierre Deligne, Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck, *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle, Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné* (Nice 1996), Société Mathématique de France, 1998, pp. 11-19.

[D89] J. Dieudonné, A. Grothendieck's early work, *K-theory* **3** (1989) 299-306; in:

[Fest] P. Cartier et al. (eds.) *The Grothendieck Festschrift*, volumes I-III, Birkhäuser, 1990; виж J. Dieudonné, De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique, vol. I, pp. 1-14.

[G] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles, Reflexions et témoignages sur un passé de mathématicien*, Montpellier 1986; (Sommaire): En guise d'avant-propos (pp. A1-A6), Promenade à travers une œuvre – ou l'enfant et la Mère (Secs. P1-P21), Lettre-Introduction (L1-L12, i-xxii), Première Partie: Fatuité et renouvellement (I.1-50, pp. 1-171), Notes (N1-N14), Deuxième Partie: L'enterrement (I), ou la robe de l'empereur de Chine (I-X, pp. 173-420), Troisième Partie: L'enterrement (II) ou la clef de Yin et de Yang (pp. 421-774); Quatrième Partie: L'enterrement (III), ou les quatre opérations (pp. 775-1252), Les portes de l'univers (Appendice à la clef du Yin et du Yang, pp. PU1-PU127); руски превод на част I: Александр Гротендик, *Урожай и посеви, Размышления о прошлом математика*, перевод Ю. Фридман, ред. В. Нуждина и В. Прасолова, Независимый Московский Университет, Москва 1996; Прогулка по творческому пути, или дитя и Мать; Часть I: Самодовольство и обновление.

[G84] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, 1984, in: *Galois Actions*, 1, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 5-48; quoted in: Yu. I. Manin, Reflections on arithmetical physics, in: *Conformal Invariance and String Theory* (Poiana Brasov, 1987), Academic Press, Boston 1989, pp. 293-303.

[I] Luc Illusie, What is ... a topos?, *Notices of the AMS* **51**:9 (2004) 1060-1061.

[J04] Allyn Jackson, Comme appelé du néant – as if summoned from the void: the life of Alexandre Grothendieck, *Notices of the AMS*, Part I, **51**:9 (2004) 1038-1056; Part II, **51**:10 (2004) 1190-1212.

[J08] A. Jackson, Grothendieck at 80, IHES at 50, *Notices of the AMS* **55**:8 (2008) 962-963.

[LNM] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K.-Y. Shih, *Hodge Cycles, Motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Mathematics **900**, Springer, 1982.

[McL] Colin McLarty, *The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality* I, May 2003.

[M09] James S. Milne, *Motives – Grothendieck's dream*, Notes for a “popular” talk at the University of Michigan, June 7, 2009, available at www.jmilne.org/math/.

[P] Valentin Poénaru, Memories of Shourik, *Notices of the AMS* **55**:8 (2008) 964-965.

[R] David Ruelle, *L'Étrange Beauté des Mathématiques*, Odile Jacob, 2008; виж глава 7. Un voyage à Nancy avec Alexandre Grothendieck, pp. 57-66.

[Sch] Winfried Scharlau, Who is Alexander Grothendieck? *Notices of the AMS* **55**:8 (2008) 930-941.

[W] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 497-508; S. Lang, A. Weil, Number of points of varieties in finite fields, *Amer. J. Math.* **76** (1954) 819-827.